Università di Camerino - Formazione Insegnanti STEM 20/21

Matematica

**Logica nella scuola secondaria di primo grado**

Laboratorio: raccolta di rompicapi

I rompicapi raccolti qui e le relative soluzioni sono tratti, a volte con modifiche minori, da *Qual è il titolo di questo libro?* di Raymond Smullyan (Zanichelli 1981)

**Indice**

**L’isola di Smullyan**2

Soluzioni per l’insegnante4

**Gli scrigni di Porzia6**

Soluzioni per l’insegnante8

**Se... allora...**9

Soluzioni per l’insegnante11

**L’isola di Smullyan**

**Lo scenario: l’isola dei cavalieri e dei furfanti**

Sull’isola di Raymond Smullyan convivono

- **cavalieri**, che dicono sempre la verità

- **furfanti**, che mentono sempre.

Ogni abitante dell'isola è o un cavaliere o un furfante. Non vi è modo di distinguere i cavalieri dai furfanti se non, eventualmente, parlando con loro.

Un viaggiatore arriva sull'isola e incontra alcuni dei suoi abitanti, *A*, *B*, *C*, … e cerca di stabilire se siano cavalieri o furfanti.

**Rompicapo 1**

Il viaggiatore incontra l’abitante *A*, che afferma “Sono un cavaliere”.

Che cos’è *A*, un cavaliere o un furfante?

**Rompicapo 2**

Il viaggiatore stavolta incontra due abitanti dell’isola, *A* e *B*, ed *A* afferma “Almeno uno tra noi due è un furfante”.

Che cosa sono *A* e *B*, cavalieri o furfanti?

**Rompicapo 3**

Il viaggiatore incontra di nuovo due abitanti, *A* e *B*, e *A* afferma “Io e *B* siamo entrambi furfanti”.

Che cosa sono *A* e *B*?

**Rompicapo 4**

Il viaggiatore incontra tre persone, *A*, *B* e C, ciascuna delle quali è un cavaliere o un furfante. *A* e *B* fanno le seguenti affermazioni:

*A*: “Siamo tutti furfanti”.

*B*: “Solo uno di noi è un cavaliere”.

Che cosa sono *A*, *B* e *C*?

**Rompicapo 5**

Supponiamo invece che *A* e *B* facciano le seguenti affermazioni:

*A*: “Siamo tutti furfanti”.

*B*: “Solo uno di noi è un furfante”.

Si può determinare cos’è *B*? Si può determinare cos’è *C*?

**Soluzioni** per l’insegnante

**Rompicapo 1**

Esaminiamo i casi possibili:

- *A* è un cavaliere. Allora dice la verità e dunque afferma di essere un cavaliere.

- *A* è un furfante. Allora mente, e quindi afferma di essere il contrario di ciò che è, ossia afferma di essere un cavaliere.

La conclusione è che *A* dice di essere un cavaliere in ogni caso, quindi non è possibile stabilire se sia un cavaliere o un furfante.

**Rompicapo 2**

*A* afferma “O io sono un furfante, o lo è *B*, oppure lo siamo entrambi”. L'affermazione dunque esclude che entrambi *A* e *B* siano cavalieri.

Esaminiamo i casi possibili per *A*.

- *A* è un cavaliere. Allora la sua affermazione è vera e quindi, non essendo lui un furfante, *B* è un furfante.

- *A* è un furfante: allora mente, mentre, affermando che tra *A* e *B* c’è almeno un furfante, direbbe la verità. Questo caso è quindi impossibile.

Ne consegue che l'unico caso possibile è il primo, dunque *A* è un cavaliere e *B* un furfante.

**Rompicapo 3**

*A* afferma “Io sono un furfante, e *B* è un furfante”.

Se *A* fosse un cavaliere, entrambe le parti della sua affermazione dovrebbero essere vere, dunque *A* dovrebbe essere un furfante – impossibile.

Dunque *A* è un furfante, e la sua dichiarazione deve essere falsa. Poiché è vero che *A* è un furfante, deve essere falso che lo è *B*. Dunque *B* è un cavaliere.

Ne consegue che l'unico caso possibile è che *A* è un furfante e *B* un cavaliere.

**Rompicapo 4**

Se *A* fosse un cavaliere, *A*, *B* e *C* dovrebbero essere tutti furfanti, il che contraddice che *A* sia un cavaliere. Dunque *A* deve essere un furfante e l’affermazione di *A* è falsa, ossia almeno uno fra *A*, *B* e *C* deve essere un cavaliere.

Se *B* fosse un furfante, allora *A* e *B* sarebbero entrambi furfanti, per cui *C* dovrebbe essere un cavaliere (poiché fra di loro c’è almeno un cavaliere). Ma in questo caso l’affermazione di *B* sarebbe vera, il che contraddice l’ipotesi che *B* sia un furfante.

Dunque *B* deve essere un cavaliere, e la sua affermazione è vera. Questo implica che *C* deve essere un furfante.

Dunque *A* e *C* sono furfanti e *B* è un cavaliere.

**Rompicapo 5**

Come nel problema precedente, *A* deve essere un furfante e la sua affermazione è falsa, ossia almeno uno fra *A*, *B* e *C* deve essere un cavaliere.

Se *B* è un cavaliere, allora è vero che esattamente uno fra *A*, *B* e *C* è un furfante, e quindi *C* deve essere un cavaliere.

Se *B* è un furfante, allora *C* deve essere un cavaliere, altrimenti sarebbe vera l’affermazione di *A*.

Dunque sappiamo che *A* deve essere un furfante, *C* deve essere un cavaliere, ma non è possibilie determinare cosa sia *B*.

**Gli scrigni di Porzia**

**Lo scenario**

Nel Mercante di Venezia di Shakespeare, Porzia aveva tre scrigni, uno d’oro, uno d’argento e uno di piombo, e in uno degli scrigni c’era il suo ritratto. Porzia metteva alla prova i suoi pretendenti facendo scegliere loro uno scrigno. Se il pretendente fosse stato tanto fortunato, o tanto saggio, da scegliere quello con il ritratto avrebbe avuto diritto alla mano di Porzia.

Sul coperchio di ogni scrigno c’era un’iscrizione, che aveva lo scopo di aiutare il pretendente a scegliere correttamente.

**Primo rompicapo di Porzia**

Porzia fece incidere sugli scrigni le seguenti iscrizioni.

**Il ritratto non è nello scrigno d’oro**

**Il ritratto non è in questo scrigno**

**Il ritratto è in questo scrigno**

Oro Argento Piombo

Porzia spiegò a un pretendente che delle tre affermazioni incise, **al massimo una** era vera.

Quale scrigno avrebbe dovuto scegliere il pretendente?

**Secondo rompicapo di Porzia**

Porzia fece preparare altri tre scrigni con le seguenti iscrizioni.

**Il ritratto è in questo scrigno**

**Il ritratto non è in questo scrigno**

**Il ritratto non è nello scrigno d’argento**

Oro Argento Piombo

Questa volta, Porzia spiegò al pretendente, delle tre affermazioni incise, **almeno una** era vera e **almeno una** era falsa.

Quale scrigno avrebbe dovuto scegliere il pretendente?

**Terzo rompicapo di Porzia**

Porzia fece di nuovo preparare altri tre scrigni con le seguenti iscrizioni.

**Il ritratto è nello scrigno d’argento**

**Il ritratto non è in questo scrigno**

**Il ritratto è in questo scrigno**

Oro Argento Piombo

Questa volta, Porzia spiegò al pretendente, delle tre affermazioni incise, **almeno due** erano vere.

Quale scrigno avrebbe dovuto scegliere il pretendente?

**Soluzioni** per l’insegnante

**Primo rompicapo**

Se il ritratto fosse nello scrigno d’oro, ci sarebbero due iscrizioni vere (quella sullo scrigno d’oro e quella sullo scrigno di piombo), il che contraddice i dati del problema.

Se il ritratto fose nello scrigno di piombo, di nuovo due delle iscrizioni sarebbero vere (quella sullo scrigno di piombo e quella sullo scrigno d’argento).

Quindi il ritratto deve essere nello scrigno d’argento, e l’unica iscrizione vera è quella sullo scrigno di piombo.

**Secondo rompicapo**

Se il ritratto fosse nello scrigno di piombo, tutte e tre le iscrizioni sarebbero vere, il che contraddice i dati del problema.

Se il ritratto fose nello scrigno d’argento, tutte e tre le iscrizioni sarebbero false, il che contraddice di nuovo i dati del problema.

Quindi il ritratto deve essere nello scrigno d’oro, e le prime due iscrizioni sono vere, mentre la terza è falsa.

**Terzo rompicapo**

Se il ritratto fosse nello scrigno d’argento, l’unica iscrizione vera sarebbe quella sullo scrigno di piombo, il che contraddice i dati del problema.

Se il ritratto fosse nello scrigno di piombo, l’unica iscrizione vera sarebbe quella sullo scrigno d’argento, il che è di nuovo contrario ai dati del problema.

Quindi il ritratto deve essere nello scrigno d’oro, e le prime due iscrizioni sono vere, mentre la terza è falsa.

**Se... allora...**

**Primo rompicapo**

Sull’isola dei cavalieri e dei furfanti, il viaggiatore incontra gli abitanti *A* e *B*, e *A* afferma

“Se io sono un cavaliere, allora lo è anche *B*”.

Che cosa sono *A* e *B*?

**Secondo rompicapo**

Un uomo viene processato per furto. Il pubblico ministero e l’avvocato difensore fanno le seguenti affermazioni:

Pubblico Ministero: Se l’imputato è colpevole, allora ebbe un complice”

Avvocato difensore: “Non è vero”!

Perché questa era la cosa peggiore che l’avvocato può dire?

**Terzo rompicapo**

Un secondo caso giudiziario riguarda il processo di tre persone, *A*, *B* e *C*, per partecipazione a un furto.

In questo caso, l’Ispettore Craig di Scotland Yard accerta i seguenti fatti:

- Se *A* è innocente o *B* è colpevole, allora *C* è colpevole

- Se *A* è innocente, allora *C* è innocente.

Si può stabilire se *A* sia colpevole o innocente?

**Quarto rompicapo**

Il terzo caso riguarda di nuovo tre persone, *A*, *B* e *C*, per partecipazione a un furto. L’ispettore Craig accerta i seguenti fatti:

- Almeno uno dei tre indagati è colpevole

- Se *A* è colpevole e *B* è innocente, allora *C* è colpevole.

Queste prove sono insufficienti per condannare uno qualsiasi degli imputati, ma indicano due tra gli imputati tra cui si trova sicuramente un colpevole. Chi sono questi due?

**Soluzioni** per l’insegnante

**Primo rompicapo**

Supponiamo che *A* sia un cavaliere. Allora la proposizione “Se io sono un cavaliere, lo è anche *B*” deve essere vera. Così *A* è un cavaliere, e lo è anche *B*.

Se invece *A* fosse un furfante, la sua dichiarazione sarebbe falsa. Questo succederebbe solo nel caso in cui *A* fosse un cavaliere e *B* un furfante – quindi la dichiarazione non può essere falsa, dato che per esserlo *A* dovrebbe essere un furfante. Quindi *A* deve essere un cavaliere!

**Secondo rompicapo**

Il Pubblico Ministero afferma, di fatto, che l’imputato non ha commesso il crimine da solo. L’avvocato difensore nega la verità di questa affermazione, il che equivale a dire che l’imputato ha effettivamente commesso il crimine da solo.

**Terzo rompicapo**

Per la prima affermazione, se *A* è innocente allora *C* è colpevole, indipendentemente dalla colpevolezza di *B* (se *A* è innocente, allora l’affermazione “*A* è innocente o *B* è colpevole” è vera). Per la seconda affermazione, se *A* è innocente allora *C* è innocente. Quindi, se *A* fosse innocente allora *C* sarebbe sia colpevole sia innocente, il che è impossibile. Quindi *A* deve essere colpevole.

**Quarto rompicapo**

Se *A* è innocente, allora *B* o *C* devono essere colpevoli per la prima affermazione.

D’altra parte, supponiamo che *A* sia colpevole. Se *B* è colpevole, allora certamente uno fra *B* e C è colpevole. Se invece *B* è innocente, allora per la seconda affermazione *C* deve essere colpevole. Quindi, di nuovo, uno fra *B* e *C* è colpevole.

Quindi i due sono *B* e *C*.